

## TD d'optimisation pour modèles tensoriels

### Exercice 1 : Unicité de la meilleure approximation de rang faible

Dans cet exercice on souhaite étudier l'unicité de la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \|\mathcal{T} - \sum_{r=1}^R a_r^1 \otimes a_r^2 \otimes a_r^3\|_2^2 \\ & \text{par rapport à } \mathbf{A}^1 \end{aligned} \quad (1)$$

On supposera que ce minimum existe pour un  $R$  donné bien que ce ne soit pas toujours le cas en théorie.

1. Rappeler la matricisation  $\mathbf{T}_1$  vue en cours. En déduire une ré-écriture possible du problème (1) qui n'utilise que des matrices.
2. Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces vectoriels. Soit  $h : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction convexe et  $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}$  une fonction linéaire. Montrer que  $hof$  est convexe. Que peut-on en déduire pour (1) ?
3. Montrer que la fonction de coût de (1) est quadratique en chacun des  $a_r^1$ . Que peut-on en déduire sur (1) ?
4. Calculer le gradient de la fonction de coût de (1). Retrouvez la meilleure estimation au sens des moindres carrés vue en cours en mettant ce gradient à 0.

### Exercice 2 : Un peu de manipulation

Un code MATLAB et des données de spectroscopie de fluorescence sont disponibles sur la plateforme du cours dans le fichier "TenseursTD". Vous pouvez retrouver ces données (ré-échantillonnées sur le mode "émission") avec une description de la campagne de mesures à cette adresse : [http://www.models.life.ku.dk/Sugar\\_Process](http://www.models.life.ku.dk/Sugar_Process) .

1. Visualiser à l'aide de la fonction "surf" de MATLAB les spectres mélangés du premier échantillon (*i.e.* les données de la première tranche frontale du tenseur).

2. Décomposer le tenseur de données en utilisant la routine "ALS". On choisira  $R = 3$ . Cette routine est à compléter à la ligne 71 en utilisant la formule revue à l'exercice 1 et en cours. On dispose du produit de Khatri Rao 'kr' ( $kr(x, y) = y \odot x$ ) et de la matricisation ' $Y_{mode}\{1\}$ '.
3. Visualiser les résultats à l'aide de la fonction "plot" pour chaque mode. Obtenez-vous des spectres négatifs ?
4. Comment pourriez-vous imposer que les facteurs estimés soient toujours non-négatifs ? Comparer une telle méthode (ANLS) avec la valeur absolue des résultats de l'ALS. Obtenez-vous les mêmes spectres dans les deux cas ?